CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"O C T A V O N I C E S C U"
Ediția a XIII-a, 24 octombrie 2009

1. a) Arătați că media aritmetică a oricăror 2, 3, ..., 20 numere dintre x, $2x$, $3x$, ... , $20x$ este tot un număr natural, unde $x = 20!$. Găsiți 2009 numere naturale distincte astfel încât media aritmetică a oricăror 2, 3, ..., 2009 dintre ele să fie tot număr natural. (am notat $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ cu $n!$)
b) Şirul infinit de numere naturale a_1, a_2, a_3, ... are proprietatea că media aritmetică a oricăror 2, 3, 4, ... dintre ele este tot număr natural. Folosind a_1, a_2 şi încă 100 din celelalte numere deduceți că $a_1 - a_2$ ξ 101 şi justificați că toate numerele şirului sunt egale.

2. Fie 13 puncte distincte E_1, E_2, ... , E_{13} situate pe un cerc. Toate triunghiurile formate cu ele sunt obtuzunghice iar, dintre toate unghiurile obtuze ale lor, cel mai mic este $E_1E_2E_3$ ce are 150^o..
a) Arătați că toate cele 13 puncte sunt situate pe arcul $E_1E_2E_{13}$.
b) Ştiind că numărul triunghiurilor în care apare valoarea minimă a unghiurilor obtuze este egal cu numărul triunghiurilor în care apare valoarea maximă a unghiurilor obtuze, aflați valoarea maximă.

3. John, Adrian şi Xman au în total 2010 stilouri. Inițial, Xman are cele mai puține şi John cele mai multe. În fiecare zi, unul dintre cei cu număr maxim de stilouri, cedează altruist câte un stilou celorlalți doi.
a) Dacă, după 700 zile, se constată că Xman are cele mai multe iar John are cele mai puține şi că în nicio zi nu au existat măcar doi cu acelaşi număr de stilouri, aflați câte stilouri are fiecare.
b) Dacă, după exact 600 zile au avut pentru prima dată doi din ei acelaşi număr de stilouri iar după încă 60 zile au toți trei acelaşi număr de stilouri, pentru prima dată, aflați câte stilouri au avut fiecare inițial.

4. a) În triunghiul ABC, fie B' şi C' proiecțiile lui B şi C pe bisectoarea unghiului A. Deduceți că $BC \geq (AB + AC) \cdot \sin\frac{A}{2}$, egalitatea având loc numai dacă $AB = AC$.
b) Fie un poligon convex $A_1A_2 \dots A_n$ de perimetru P_1 şi un poligon înscris $B_1B_2 \dots B_n$ de perimetru P_2.

i) Dacă $A_1A_2 \dots A_n$ este regulat, arătați că $P_2 \geq P_1 \cdot \sin\frac{A_1}{2}$ iar egalitatea are loc dacă n este par pentru o infinitate de poligoane înscrise $B_1B_2 \dots B_n$ iar dacă n este impar doar pentru unul singur.

ii) Dacă $A_1A_2 \dots A_n$ are toate unghiurile mai mari sau egale cu 60^o şi $P_2 \leq \frac{1}{2} \cdot P_1$, arătați că $n = 3$, $A_1A_2A_3$ este triunghi echilateral iar B_1, B_2, B_3 sunt mijloacele laturilor.
[*Se ştie că suma unghiurilor unui poligon convex cu n vârfuri este egală cu* $\mathbf{180^o(n-2)}$ *şi că* $\mathbf{\sin x^o > \frac{1}{2}}$, *pentru* $\mathbf{x^o \in (30^o; 90^o)}$.]

5. O tablă pătratică 20×20 este colorată alternativ, o coloană albă şi una neagră. Ea este acoperită integral cu x dominouri verticale, y dominouri orizontale şi z pătrate, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:
a) numărul dominourilor verticale negre şi albe este acelaşi iar x şi y sunt pare şi $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 100$;
b) pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ cu $a + b + c = 100$, există o acoperire cu $x = 2a$, $y = 2b$ şi $z = c$;
c) orice dreaptă orizontală ce intersectează tabla taie un număr egal de dominouri verticale negre şi albe.

La multi ani, Laurian!