**_CONCURSUL INTERJUDEȚEAN_**
**_“OCTAV ONICESCU”_**
**_EDITIA a XVII-a, 2 NOIEMBRIE 2013_**

*Barem și indicații de rezolvare*

*OBSERVAȚII:*

1. *Orice soluție alternativă va fi punctată corespunzător.*
2. *Soluțiile la care lipsesc justificări și/sau demonstrații explicite strict necesare vor fi depunctate.*

***Problema 1.***

Suma $= -2$

(4 puncte)

Pentru $n = 2k$ o soluție poate fi formată folosind $k$ perechi de numere nenule opuse.

(4 puncte)

Pentru $n = 2k + 1$

- Dacă $n = 3$ din $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 0 \end{cases}$ se obține $a_1 a_2 a_3 = 0$ ceea ce contrazice $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^*$

(4 puncte)

- Dacă $n = 5$ o soluție este $1 + \sqrt{10};\ 1 - \sqrt{10};\ -4;\ 1;\ 1$

(4 puncte)

- Dacă $n \geq 7$ se completează soluția de la $n = 5$ cu perechi de numere nenule opuse

(4 puncte)

***Problema 2.***

a. Dacă $h$ este înălțimea din $B$ a triunghiului $BAC$, avem
$\frac{s_1}{s_3} = \frac{OA \cdot h}{OC \cdot h} = \frac{OA}{OC}$ și analog $\frac{s_4}{s_2} = \frac{OA}{OC}$. Deci $s_1 \cdot s_2 = s_3 \cdot s_4$.

(4 puncte)

$$S = (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4) \geq (s_1 + s_2) + 2\sqrt{s_3 \cdot s_4} = s_1 + s_2 + 2\sqrt{s_1 \cdot s_2}.$$

(4 puncte)

Egalitatea are loc pentru $s_3 = s_4$

b. Din a. rezultă $\sqrt{S}^2 \geq (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2 \Longrightarrow \sqrt{S} \geq \sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}$ cu egalitate pentru $s_3 = s_4$.
Analog $\sqrt{S} \geq \sqrt{s_3} + \sqrt{s_4}$ cu egalitate pentru $s_1 = s_2$.

(4 puncte)

Din $2\sqrt{S} = \sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} + \sqrt{s_4}$ obținem $s_1 = s_2$ și $s_3 = s_4$.
Folosind $s_1 \cdot s_2 = s_3 \cdot s_4$ obținem $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$.

(4 puncte)

Avem $\frac{OA}{OC} = \frac{s_1}{s_3} = 1 \Longrightarrow OA = OC$ și analog $OB = OD \Longrightarrow ABCD$ paralelogram.

(4 puncte)

***Problema 3.***

a.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | A | B | B |
| A | A | C | B |
| D | C | C | E |
| D | D | E | E |

Alegem un număr dintr-un pătrățel oarecare.Se pot mări celelalte 15 numere cu o unitate .
De exemplu, dacă numărul ales este în pătratul 2X2 din stânga sus, mărim succesiv numerele din pătrățelele notate cu B, apoi numerele din pătrățelele notate cu C,D și E.
În final mărim numerele din 3 pătrățele din cele 4 notate cu A ( cu exceptia celui ales).
Am obținut combinând 5 “mutări” o nouă mutare care de fapt este echivalentă cu micșorarea numărului ales cu o unitate.

(10 puncte)

Evident că aplicând repetat noua mutare și alegând de fiecare dată un număr de valoare maximă numerele se vor egala.

(4 puncte)

b. Observăm că 2014 nu este divizibil cu 3 și la orice mutare suma celor 36 de numere crește cu 3.
Deducem că suma nu poate deveni niciodată divizibilă cu 3.
Dacă numerele s-ar egala, suma ar deveni divizibilă cu 36 deci si cu 3. Absurd.
Concluzia este că numerele nu se pot egala.

(6 puncte)

***Problema 4.***

a. Un exemplu este șirul numerelor naturale pare.

(2 puncte)

Alegând $n$ termeni consecutivi, ei sunt de forma $x, x+2, \dots, x+2n-2$ și au suma $n \cdot (x+n-1)$ divizibilă cu $n$.

(4 puncte)

b. Suma primilor $2014$ termeni și suma următorilor 2014 se divid cu $2013$.
Deci suma primilor 4028 se divide cu 2013.

(2 puncte)

Excluzându-l pe primul, suma următorilor 4027 se divide cu 4026 deci si cu 2013.
Primul termen este diferența între doi multipli de 2013 , deci este divizibil cu 2013.

(2 puncte)

Folosim un raționament similar pentru a dovedi că orice termen $a_k$ al șirului este nul.
Pentru orice $n \geq 2$ alegem cei $2n$ termeni consecutivi începând cu $a_k$.
Sumele primilor $n$ termeni și a ultimilor $n$ sunt divizibile cu $-1$ , deci suma celor $2n$ este divizibilă cu $n-1$.

(3 puncte)

Dar suma ultimilor $2n-1$ este divizibilă cu $2n-2$ deci și cu $n-1$.
Termenul $a_k$ este diferența a doi multipli de $n-1$ deci se divide cu $n-1$.

(3 puncte)

Cum $n$ este arbitrar ales, $a_k$ se divide cu orice număr natural, deci este nul.

(4 puncte)

***Problema 5.***

a. Pentru orice $x \in A \cup B$ avem
$x \in A, x \in A \Longrightarrow x \cdot x \in A$ sau $x \in B, x \in B \Longrightarrow x \cdot x \in A$ . Deci $x^2 \in A$.

(3 puncte)

Pentru un număr prim $p$ oarecare, avem $p^{2012} \in A$ deoarece este pătrat perfect.

(3 puncte)

Presupunem prin absurd că $p \in A$. Din $p \in A, p^{2012} \in A \Longrightarrow p \cdot p^{2012} \in A$ absurd. Deci $p \in B$

(4 puncte)

b. Un număr prim este în $B$. Deci produsul a două numere prime (distincte sau nu) este în $A$. Produsul a trei numere prime (distincte sau nu) este deci în $B$.
Continuând raționamentul, deducem că un număr $x \in A \cup B$ :

- este în $A$ dacă este produsul unui număr par de factori primi ( distincți sau nu )
- este în $B$ dacă este produsul unui număr impar de factori primi ( distincți sau nu).

(4 puncte)

Cum $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ deducem că $2013^{1023} = 3^{1023} \cdot 11^{1023} \cdot 61^{1023}$ este produsul a 3069 de factori primi deci este în $B$.

(3 puncte)

Numărul $2^a 3^b 5^c$ cu $a + b + c = 2014$ este produsul a 2014 factori primi deci este în $A$ .

(3 puncte)