COLEGIUL NAŢIONAL "A.T. LAURIAN" BOTOŞANI
29 octombrie 2016

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "OCTAV ONICESCU" Ediţia a XIX-a

Soluții și barem

Problema 1.

I. Fie x o sumă de k pătrate impare. Dar $x = \mathcal{M}_8 + 6$ și orice pătrat impar este $\mathcal{M}_8 + 1$ deci $k \geq 6$.. 4 puncte

Deducem $8n^2 + 86 \geq 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2$ și $n \geq 5$............................4 puncte

II. $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 84$ și $x = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + (2n-1)^2 + (2n+1)^2$.

Deoarece $n \geq 5$ avem $7 < 2n - 1 < 2n + 1$ și pătratele sunt distincte..............10 puncte

Problema 2.

I. Fie d cel mai mic număr nenul din A și $2016 = dc + r$ împărțirea cu rest a lui 2016 prin d cu $0 \leq r < d$. Cum 2016 și $d \in A$, deducem că $\{2016 - d, 2016 - 2d, \dots, 2016 - cd = r\} \subset A$ ....4 puncte

Datorită minimalității lui d rezultă că $r = 0$ și d este divizor al lui 2016.............4 puncte.

II. Avem $2016 = dc$ și $\{dc, d(c-1), \dots, d, 0\} \subset A$ .Pentru orice $x \in A, x \neq 0$ se demonstrează analog cu demonstrația pentru 2016 că x este un multiplu al lui d.

$\mathrm{A} = \{dc, d(c-1), \dots, d, 0\}$..5 puncte

Pentru orice divizor d al lui 2016 mulțimea $\mathrm{A} = \{dc, d(c-1), \dots, d, 0\}$ verifică toate condițiile din enunț.

Numărul mulțimilor este exact numărul divizorilor lui 2016 adică 36 .... 5 puncte

Problema 3.

Notăm cu S și T mijloacele laturilor $[AB]$ și $[CD]$.

PQ este mediatoare pentru $[AB]$ și $[CD]$ $\Rightarrow S, P, Q, T$ coliniare, $AB \parallel CD$ și $ABCD$ este trapez isoscel sau dreptunghi ……………………………………………………………………..………6 puncte

$$ST = SP + PT = \frac{1}{2}(AB \cdot tg\ 15° + CD \cdot tg\ 75°)$$

$$ST = SQ + QT = \frac{1}{2}(AB \cdot tg\ 75° + CD \cdot tg\ 15°)$$

Obținem $(AB - CD)(tg\ 75° - tg\ 15°) = 0$ și $AB = CD$ iar $ABCD$ este dreptunghi................6 puncte

$\widehat{PAD} = 90° - 15° = 75°$, $\widehat{PDA} = 90° - 60° = 30°$, deci $\widehat{APD} = 75°$ și $AD = DP = DC$.

Prin urmare $ABCD$ este pătrat. …………………………………………………...……….6 puncte

Problema 4.

I. Alegem $x_1 = x_2 < x_3 < x_4 \dots < x_{1000}$ cu $x_k = a \cdot F_k$, $(\forall)k$..............................4 puncte
Pentru orice x_i, x_j, x_k cu $i < j < k$ avem
$x_i + x_j \leq x_{j-1} + x_j = a \cdot (F_{j-1} + F_j) = a \cdot F_{j+1} = x_{j+1} \leq x_k$.
Deci x_i, x_j, x_k nu sunt laturile unui triunghi ....6 puncte

II. Presupunem că există în interval 1001 numere $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{1001}$ astel încât oricare 3 nu sunt laturi ale unui triunghi. Avem $y_{k-2} + y_{k-1} \leq y_k$ pentru orice k.
Deducem $(y_{k-2} - a \cdot F_{k-2}) + (y_{k-1} - a \cdot F_{k-1}) \leq (y_k - a \cdot F_k)$. Cum $(y_1 - a \cdot F_1) \geq 0$ și $(y_2 - a \cdot F_2) \geq 0$, obținem $(y_k - a \cdot F_k) \geq 0$ pentru orice k.........................4 puncte.
Avem $0 > (b - a \cdot F_{1001}) \geq (y_{1001} - a \cdot F_{1001}) \geq 0$ absurd..............................4 puncte

Problema 5.

a. $a_k + b_k + c_k = a_{k-1} - b_{k-1} + b_{k-1} - c_{k-1} + c_{k-1} - a_{k-1} = 0.$
$a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 + c_{k+1}^2 = (a_k - b_k)^2 + (b_k - c_k)^2 + (c_k - a_k)^2$
$= 3(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2) - (a_k + b_k + c_k)^2 = 3(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2)$ și
$a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 + c_{k+1}^2$ se divide cu $a_k^2 + b_k^2 + c_k^2$ .... 6 puncte

b. $a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \cdot 3^{k-2}, (\forall)k \geq 2$. Cum a_1, b_1, c_1 nu pot fi toate egale deducem că $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = (a_1 - b_1)^2 + (b_1 - c_1)^2 + (c_1 - a_1)^2 \geq 2$.

$$\max(a_{203}^2, b_{203}^2, c_{203}^2) \geq \frac{1}{3}(a_{203}^2 + b_{203}^2 + c_{203}^2) = (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \cdot 3^{200} \geq 2 \cdot 3^{200}$$

Egalitatea nu are loc deoarece $\max(a_{203}^2, b_{203}^2, c_{203}^2)$ este pătrat perfect și $2 \cdot 3^{200}$ nu este pătrat perfect .... 6 puncte

c. Avem $2 \cdot 3^{200} > \max(a_{202}^2, b_{202}^2, c_{202}^2) \geq \frac{1}{3}(a_{202}^2 + b_{202}^2 + c_{202}^2) = (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \cdot 3^{199}$.
Deducem că $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = (a_1 - b_1)^2 + (b_1 - c_1)^2 + (c_1 - a_1)^2 < 6$ și obținem că două dintre numerele a_1, b_1, c_1 sunt egale și al treilea diferă cu o unitate de ele. Imediat găsim că numerele sunt 19, 19 și 20. ………………………………………………………….. 3 puncte
Pentru aceste numere avem $a_{202}^2 + b_{202}^2 + c_{202}^2 = (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \cdot 3^{200} = 2 \cdot 3^{200}$ și evident că $\max(a_{202}^2, b_{202}^2, c_{202}^2) < 2 \cdot 3^{200}$ ………………………………………………….. 3 puncte