COLEGIUL NAŢIONAL "A.T. LAURIAN" BOTOŞANI
30 noiembrie 2012

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "OCTAV ONICESCU" Ediţia a XV-a

Problema 1.

Sunteţi legat la ochi, în faţa unei mese. Pe masă găsiţi un pachet de 52 de cărţi, jumătate dintre ele cu faţa în sus şi jumătate cu faţa în jos. Amestecaţi bine pachetul de cărţi. Trebuie acum să formaţi două pachete de câte 26 de cărţi, fiecare având acelaşi număr de cărţi cu faţa în sus. Puteţi aşeza orice carte în oricare dintre cele două pachete, întorcând-o sau nu. Explicaţi cum veţi proceda.

Problema 2.

Fie A mulţimea tuturor numerelor întregi care pot fi scrise sub forma $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \ldots \pm 2012^2$.

a) Calculaţi $x^2 - (x+1)^2 - (x+2)^2 + (x+3)^2$ şi arătaţi că $\{-2\ ;\ 2\ ;\ 4\} \subset A$.
b) Calculaţi $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2$ şi deduceţi că A conţine toate numerele naturale pare mai mici sau egale cu 2012.

Problema 3.

Fie $ABCD$ patrulater convex şi punctele M, N, P pe laturi. Arătaţi că $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $aria(MNP) \leq \frac{1}{2} \cdot aria(ABCD)$ pentru orice alegere a punctelor M, N, P.

Problema 4.

Pentru $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ notăm $S_k = \{\, n \in \mathbb{N}^* \mid n\ = \text{suma a } k \text{ divizori distincţi ai săi} \,\}$.

a) Arătaţi că $S_2 = \emptyset, S_3 = \{\, 6p \mid p \in \mathbb{N}^* \,\}$ şi că dacă $n \in\ S_k$ atunci $2n \in\ S_k \cap S_{k+1}$
b) Găsiţi un număr care poate fi scris ca sumă de k divizori distincţi ai sai pentru orice $k = \overline{3\,,2012}$.

Problema 5.

O tablă de şah are 64 numere reale aşezate strict crescător pe fiecare linie şi coloană. Pe orice pătrat 2×2 , suma numerelor de pe o diagonală este egală cu suma numerelor de pe cealaltă diagonală.

a) Dacă cele 64 de numere sunt naturale arătaţi ca suma lor se divide cu 8.
b) Dacă în tablă avem exact 15 numere distincte cu minimul 0 şi maximul 140 aflaţi numerele.

***TIMP DE LUCRU*: 4 ORE.**
***PUNCTAJ*: 20 de puncte pentru fiecare problemă.**