CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ *"OCTAV ONICESCU"* *Ediția a XII-a,* 1 noiembrie 2008

1. Un papagal a început să îi papagalicească la naştere mamei sale: „M”, „A”, „MA”, „AMA”, „MAAMA”, „AMAMAAMA” (fiecare cuvânt e format prin lipirea celor două anterioare). Care este a 28-a literă din al 2008-lea cuvânt?

2. Pe o masă de biliard în formă de paralelogram $ABCD$ vrem să lansăm o bilă din punctul $M\in(AB)$ care să lovească mai întâi latura (BC) într-un punct oarecare N iar apoi laturile (CD) şi (DA) în P şi Q apoi să se întoarcă în M şi să meargă încă o dată pe acelaşi traseu $MNPQ$. Demonstrați că:

a) dacă masa nu este dreptunghiulară sau $MN \nparallel AC$, acest lucru nu este posibil;

b) dacă masa este dreptunghiulară şi lansăm bila din orice punct $M\in(AB)$, dar paralel cu AC, atunci obținem un traseu repetitiv $MNPQ$ (încercați şi practic!).

3. Fie A şi B mulțimi nevide disjuncte cu $A\cup B=\mathbb{N}$. Pentru orice x şi $y\in\mathbb{N}$ avem: dacă x şi $y\in A$, atunci $x+y\in A$; dacă x şi $y\in B$, atunci $x+y\in A$; dacă $x\in A$ şi $y\in B$, atunci $x+y\in B$. Arătați că mulțimea A conține toate numerele pare şi B toate numerele impare.

4. Un bătrân are un teren hexagonal regulat $ABCDEF$ şi dă celor şase fii ai săi câte o parcelă astfel: consideră punctele A', B', C', D', E', F' pe (FA), (AB), (BC), (CD), (DE), respectiv, (EF); bătrânul ia terenul $A'B'C'D'E'F'$ iar fiii iau câte un triunghi din cele şase triunghiuri formate. Ştiind că terenurile fiilor au arii egale, arătați că:

a) $x_1(l-x_2)=x_2(l-x_3)=x_3(l-x_4)=x_4(l-x_5)=x_5(l-x_6)=x_6(l-x_1)$; **b)** dacă $x_1\ge x_2$ atunci $x_2\ge x_3$;

c) bătrânul rămâne tot cu un hexagon regulat de arie cel puțin $\frac{3}{4}$ din aria terenului inițial (am notat $AB=l$ şi $AA'=x_1$, $BB'=x_2$, $CC'=x_3$, ..., $FF'=x_6$. Se ştie că aria MNP este egală cu $\frac{1}{2}\cdot MN\cdot MP\cdot\sin\hat{M}$).

5. Cartoanele $A_1V_1A_2$, $A_2V_2A_3$, ..., $A_nV_nA_{n+1}$ (cu $n\ge 3$) au formă echilateră cu laturile 1, 2, ..., n (cm), sunt aşezate cu baza pe pământ şi lipite de un perete. Furnicile alpiniste **Do** şi **Li** escaladează aceşti „munți”: **Do** pe traseul $A_1V_1A_2V_2A_3V_3$ ... $A_nV_nA_{n+1}$ şi **Li** pe ruta inversă (din A_{n+1} spre A_1). Ele pleacă amândouă deodată din A_1 şi A_{n+1} cu aceeaşi viteză de 1 cm/s.

a) Arătați că furnicile se întâlnesc după $\frac{n^2+n}{2}$ secunde de la plecare, că **Do** atinge vârful V_k în k^2 secunde iar **Li** atinge V_p în n^2+n-p^2 secunde.

b) Poate fi **Do** într-un vârf exact în momentul în care **Li** este în V_{n-1}? Aflați n, ştiind că până la întâlnirea lor, ori de câte ori a fost **Li** într-un vârf a fost şi **Do** în alt vârf.

c) Dacă $n=2009$ explicați că **Do** şi **Li** nu vor fi niciodată simultan în două vârfuri.

d) Aflați n ştiind că poligonul $A_1V_1V_2V_3$ ... V_nA_{n+1} este convex şi că fix după o oră **Do** şi **Li** se pot vedea prima oară (considerăm cunoscut că $a^2\neq 3c+2$, orice a, $c\in\mathbb{N}$).