CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"O C T A V O N I C E S C U"
Ediția a XIV-a, 13 noiembrie 2010

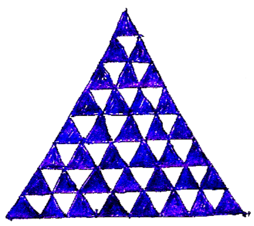
1. **Considerăm mulțimea A formată din 201 numere naturale cel mai mic fiind 10 şi având proprietatea: $\forall x \in A$ şi $\forall y \in N^* - A$ avem $x + y \in N^* - A$.**
   Arătați că $\forall x \in N$ nedivizibil cu 10 este în $N - A$ şi aflați cel mai mare element din A.

2. **Spunem că un patrulater convex $ABCD$ este "bun" dacă $\mathscr{P}(EFGH) \geq AC + BD$ pentru orice $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$, $H \in (DA)$.**
   - **a.** **Arătați că orice dreptunghi $ABCD$ este "bun" (folosind eventual mijloacele segmentelor $(HG),(EG)$ şi (EF)).**
   - **b.** **Fie $ABCD$ patrulater "bun". Alegem F, G, H mijloacele laturilor corespunzatoare, E variabil pe (AB), O mijlocul lui (AB) şi H' simetricul lui H față de AB. Arătați că $FO + OH' \leq FE + EH'$ pentru $\forall E \in (AB)$ şi $ABCD$ dreptunghi.**

3. **Se consideră 30 de numere $\frac{1}{38}; \frac{1}{39}; \frac{1}{40}; \cdots \frac{1}{66}; \frac{1}{67}$. Alegem două dintre ele a şi b, le eliminăm şi le înlocuim cu $\frac{ab}{a+b+15ab}$. Repetăm acest procedeu până rămâne un singur număr.**
   - **a.** **Calculați suma inverselor numerelor inițiale şi suma inverselor numerelor după primul pas.**
   - **b.** **Arătați că indiferent de alegerea făcută la fiecare pas numărul final este $\frac{1}{2010}$.**
   - **c.** **Este posibil ca după un număr de paşi, 15 dintre numerele rămase să fie egale?**

4. **Patrulaterul convex $ABCD$ are intersecția diagonalelor O iar pătratele de diagonale (AD) şi (BC) au comun vârful F (le notăm $AEDF$ şi $BGCF$) . Arătati că:**
   - **a.** $AC \perp BD, (AC) \equiv (BD)$ **iar E, O, G sunt coliniare.**
   - **b.** **Pătratele de diagonale (AB) şi (DC) au şi ele un vârf comun, situat pe EG.**

5. **Datorită crizei o tablă de şah şi-a redus numărul laturilor cu 25%. In consecință fiecare dintre cele 64 de pătrățele au devenit triunghiuri ca în figură.**
   - **a.** **Oricare două triunghiuri vecine pot fi acoperite de un romb. Să se arate că se pot folosi 28 de astfel de romburi (fără suparapuneri) dar nu şi 29.**
   - **b.** **Aşezăm K regi şi 64-K regine astfel încât oricare doi regi să nu fie vecini şi orice regină să fie vecină cu măcar un rege. Să se arate că valorile minimă, respectiv maximă a lui K sunt 16 şi 36 (specificând şi aşezările corespunzătoare).**



NOTA: Timp de lucru 4 ore.