***CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ***

***“OCTAV ONICESCU”***

***Ediţia a XVII-a***

***Soluții***

***Problema 1.***

Avem inegalitatea

$$x^{2}+y^{2}\geq \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^{2}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x=y$. Deducem că suma pătratelor tuturor numerelor descrește (nestrict) după fiecare din cele 6 transformari. Dar după ultima transformare obținem numărul $8$ deci suma pătratelor rămâne constantă $64$. Mai mult, la fiecare transformare se vor folosi două numere $x$ și $y$ egale. Numărul final $8$ se obține din două numere $4\sqrt{2}$, care fiind iraționale nu fac parte din numerele inițiale. La rândul lor valorile $4\sqrt{2}$ provin din câte două numere de $4$. Deci $8$ se obține din patru numere de $4$ . Deoarece inițial avem $7$ numere, cel puțin un număr $4$ este obținut din două valori $2\sqrt{2}$ care la rândul lor se obțin din patru numere de $2$. Deci numerele inițiale sunt 2,2,2,2,4,4,4.

***Problema 2.***



$1.⟹2. $ Alegem $\left(MN\right)$ axa de simetrie a trapezului si $P$ și $Q$ de o parte și de alta a dreptei $MN$ cu $MP=NQ$.

$2.⟹1.$ [$MN] $și $[PQ]$ nu pot avea capăt comun. și se intersectează într-un punct interior $O$.

 $Aria\left(ADQP\right)=Aria\left(ADNM\right)⟹Aria\left(MQN\right)=Aria(MQP)⟹Dist\left(N,MQ\right)=Dist(P,MQ)⟹MQ∥NP$.

Din egalitățile perimetrelor avem:

$$PM+MA+AD+DQ=QN+NC+CB+BP$$

$$MP+PB+BC+CN=NQ+QD+DA+AM$$

și adunând obținem $MP=NQ$.

Presupunem că $MP∦QN$. Folosind $MQ∥NP$ și $MP=NQ$ s-ar deduce că $MPNQ$ este trapez isoscel cu $MN=PQ$ ( absurd). Deci $MP∥QN⟹AB∥CD$ și $ABCD$ trapez.

Din$ Aria\left(ADNM\right)=Aria\left(BCNM\right)⟹AM+DN=BM+CN$ . Dar și perimetrele sunt egale și avem $AM+DN+AD=BM+CN+BC⟹AD=BC$ și trapezul este isoscel.

***Problema 3.***

1. Pentru orice $k=\overline{1,n}$ avem $25x $sumă de $k$ pătrate deoarece $x$ este sumă de $k$ pătrate.

Pentru orice $k=\overline{n+1,2n}$ avem $k=n+p$ cu $p=\overline{1,n}$. Folosim scrierile lui

$x$ ca sumă de $n$ respectiv $p$ pătrate perfecte

$$x=a\_{1}^{2}+a\_{2}^{2}+…+a\_{n}^{2}=b\_{1}^{2}+b\_{2}^{2}+…+b\_{p}^{2}$$

Rezultă

$$25x=16x+9x=16a\_{1}^{2}+16a\_{2}^{2}+…+16a\_{n}^{2}+9b\_{1}^{2}+9b\_{2}^{2}+…+9b\_{p}^{2}$$

care este o sumă de $k$ pătrate.

1. Cum $25\in P\_{2}$ rezultă folosind punctul **a.** al problemei că $25^{2}\in P\_{4} , 25^{3}\in P\_{8} , … , 25^{10}\in P\_{1024} , 25^{11}\in P\_{2048} $ Dar evident $P\_{2048} ⊂P\_{2015} , $deci $25^{11}\in P\_{2015}$

***Problema 4.***

1. Niciuna dintre cele $39$ de sume nu poate să dea restul $0$ deoarece ar fi contrazisă ipoteza. Dacă două dintre sume ar avea acelasi rest atunci diferența ar da restul $0$ deci iar s-ar contrazice ipoteza.
2. Sumele dau resturile $1, 2, … ,39 $. Considerăm și sumele $v\_{2}; v\_{2}+v\_{1}; v\_{2}+v\_{1}+v\_{3}; …; v\_{2}+v\_{1}+…+v\_{39}$. Analog și aceste sume vor da resturile $1, 2, … ,39$. Dar acestea sunt exact sumele inițiale cu excepția primelor sume ($v\_{1}$ respectiv $v\_{2})$. Deci $v\_{1}$ și $v\_{2}$dau acelasi rest la împărțirea cu 40. Deducem $v\_{1}$ $=v\_{2}$. Reluând raționamentul dar modificând ordinea vârstelor se obține că toti concurenții au aceeasi vărstă $v$. Dacă $v$ ar fi divizibil cu $2$ sau 5 atunci oricare 20 respectiv 8 concurenți ar avea suma vârstelor divizibilă cu 40 (contradicție).

Deci $v\_{1}=v\_{2}=v\_{3}=…=v\_{39}=$ $17$.

Submulțimea cu suma vărstelor divizibilă cu $40 $trebuie sa conțină toți elevii (altfel prin înlocuirea unuia dintre elevii submulțimii cu un altul care nu este în submulțime s-ar contrazice unicitatea acestei submulțimi) . Notând cu $x$ vârsta profesorului vom avea

$\left(x+39∙17\right)\vdots 40=>x-17 \vdots 40$ deci $x $este de forma $40k+17 , k\in N$.