***CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ***

***“OCTAV ONICESCU”***

***Ediţia a XVII-a***

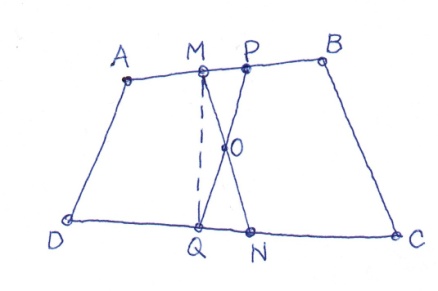
***Soluții***

***Problema 1.***

Avem inegalitatea

cu egalitate dacă și numai dacă . Deducem că suma pătratelor tuturor numerelor descrește (nestrict) după fiecare din cele 6 transformari. Dar după ultima transformare obținem numărul deci suma pătratelor rămâne constantă . Mai mult, la fiecare transformare se vor folosi două numere și egale. Numărul final se obține din două numere , care fiind iraționale nu fac parte din numerele inițiale. La rândul lor valorile provin din câte două numere de . Deci se obține din patru numere de . Deoarece inițial avem numere, cel puțin un număr este obținut din două valori care la rândul lor se obțin din patru numere de . Deci numerele inițiale sunt 2,2,2,2,4,4,4.

***Problema 2.***



Alegem axa de simetrie a trapezului si și de o parte și de alta a dreptei cu .

[și nu pot avea capăt comun. și se intersectează într-un punct interior .

.

Din egalitățile perimetrelor avem:

și adunând obținem .

Presupunem că . Folosind și s-ar deduce că este trapez isoscel cu ( absurd). Deci și trapez.

Din . Dar și perimetrele sunt egale și avem și trapezul este isoscel.

***Problema 3.***

1. Pentru orice avem sumă de pătrate deoarece este sumă de pătrate.

Pentru orice avem cu . Folosim scrierile lui

ca sumă de respectiv pătrate perfecte

Rezultă

care este o sumă de pătrate.

1. Cum rezultă folosind punctul **a.** al problemei că Dar evident deci

***Problema 4.***

1. Niciuna dintre cele de sume nu poate să dea restul deoarece ar fi contrazisă ipoteza. Dacă două dintre sume ar avea acelasi rest atunci diferența ar da restul deci iar s-ar contrazice ipoteza.
2. Sumele dau resturile . Considerăm și sumele . Analog și aceste sume vor da resturile . Dar acestea sunt exact sumele inițiale cu excepția primelor sume ( respectiv . Deci și dau acelasi rest la împărțirea cu 40. Deducem . Reluând raționamentul dar modificând ordinea vârstelor se obține că toti concurenții au aceeasi vărstă . Dacă ar fi divizibil cu sau 5 atunci oricare 20 respectiv 8 concurenți ar avea suma vârstelor divizibilă cu 40 (contradicție).

Deci .

Submulțimea cu suma vărstelor divizibilă cu trebuie sa conțină toți elevii (altfel prin înlocuirea unuia dintre elevii submulțimii cu un altul care nu este în submulțime s-ar contrazice unicitatea acestei submulțimi) . Notând cu vârsta profesorului vom avea

deci este de forma .