CONCURSUL INTERJUDEȚEAN
"OCTAV ONICESCU"
EDITIA a XVII-a, 2 NOIEMBRIE 2013

Problema 1.

Calculați $\left(1+\sqrt{10}\right)^3+\left(1-\sqrt{10}\right)^3+(-4)^3$. Arătați că pentru $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in\mathbb{R}^*$ sistemul $\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_n=0 \\ a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=0 \end{cases}$ are soluții dacă și numai dacă $n\neq 3$.

Problema 2.

Fie $ABCD$ patrulater convex și O intersecția diagonalelor. Notăm cu s_1, s_2, s_3, s_4 ariile triunghiurilor OAB, OCD, OBC respectiv ODA și cu S aria patrulaterului. Arătați că:

a. $s_1\cdot s_2=s_3\cdot s_4$ și $S\geq s_1+s_2+2\sqrt{s_1\cdot s_2}$

b. dacă $2\sqrt{S}=\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3}+\sqrt{s_4}$ atunci $ABCD$ este paralelogram.

Problema 3.

O tablă de șah $n\times n$ are n^2 numere întregi cu suma 2014. Putem alege un pătrat 2×2 inclus în tablă și mări cu o unitate fix 3 dintre cele 4 numere. Folosind de mai multe ori această "mutare", dorim să egalăm cele n^2 numere ale tablei. Arătați că:

a. dacă $n=4$, numerele se pot egala.
b. dacă $n=6$, numerele nu se pot egala.

Problema 4.

a. Dați exemplu de un șir (infinit) de numere naturale ***distincte***, cu proprietatea că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, suma oricăror n numere consecutive din șir este divizibilă cu n.
b. Fie un șir de numere naturale, cu proprietatea că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ suma oricăror n numere consecutive din șir este divizibilă cu $n-1$. Arătați că suma primelor 4028 de numere se divide cu 2013 și primul număr se divide cu 2013. Dovediți că toate numerele șirului sunt nule.

Problema 5.

Fie A și B două mulțimi disjuncte cu $A\cup B=\mathbb{N}-\{0;1\}$, $p^{2013}\in B$ pentru orice număr prim p și:

- $x, y\in A \; sau \; x, y\in B \implies xy\in A$
- $x\in A, y\in B\implies xy\in B$

a. Arătați că orice pătrat perfect este în A și orice număr prim este în B.
b. În ce mulțime (A sau B)se gasește numărul 2013^{1023}? Dar $2^a3^b5^c$ cu $a+b+c=2014$?

TIMP DE LUCRU: 4 ore
PUNCTAJ: 20 de puncte pentru fiecare problemă.