COLEGIUL NAŢIONAL "A.T. LAURIAN" BOTOŞANI
29 octombrie 2016

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "OCTAV ONICESCU"
Ediţia a XIX-a

Problema 1.

Fie n un număr natural și $x = 8n^2 + 86$. Demonstrați că x se poate scrie ca suma pătratelor unor numere naturale impare distincte dacă și numai dacă $n \geq 5$.

Problema 2.

Mulțimea A de numere naturale are $\min A = 0$, $\max A = 2016$ și $|x - y| \in A$, $(\forall)x, y \in A$.
Arătați că cel mai mic număr nenul din A este un divizor al lui 2016 și determinați câte astfel de mulțimi A există.

Problema 3.

În interiorul patrulaterului convex $ABCD$ există punctele P și Q astfel încât triunghiurile ABQ și CDP sunt echilaterale iar triunghiurile ABP și CDQ sunt isoscele cu unghiuri de $150°$ în P respectiv Q. Arătați că $ABCD$ este pătrat.

Problema 4.

Se consideră șirul lui Fibonacci (cu $F_1 = F_2 = 1$ și $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(\forall)n > 2$) și intervalul $[a\,; b]$ cu $0 < a < b$ și $F_{1000} \leq \frac{b}{a} < F_{1001}$. Arătați că putem găsi 1000 numere reale (nu neapărat distincte) din interval astfel încât oricare 3 să nu fie laturile unui triunghi, dar nu putem găsi 1001 astfel de numere.

Problema 5.

Considerăm șirurile de numere întregi $(a_n), (b_n)$ și (c_n) cu $a_1 + b_1 + c_1 = 58$ și $a_{n+1} = a_n - b_n$, $b_{n+1} = b_n - c_n$, $c_{n+1} = c_n - a_n$,$(\forall)n \geq 1$.

a. Arătați că $a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 + c_{k+1}^2$ se divide prin $a_k^2 + b_k^2 + c_k^2$ pentru $k \geq 2$.
b. Arătați că $\max(a_{203}^2, b_{203}^2, c_{203}^2) > 2 \cdot 3^{200}$.
c. Determinați a_1, b_1 și c_1 astfel încât să avem $\max(a_{202}^2, b_{202}^2, c_{202}^2) < 2 \cdot 3^{200}$.

***TIMP DE LUCRU*: 4 ORE.**
***PUNCTAJ*: 20 de puncte pentru fiecare problemă.**
Se acordă 10 de puncte din oficiu.