***CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ***

***“OCTAV ONICESCU”***

***Ediţia a XXI-a***

***Soluții și barem***

***Problema 1.***

 *.................................................................................................................* **2 puncte**.

Numerele sunt prime și convine ................................ **4 puncte**. Dacă și atunci și deci neprim ………....…... **4 puncte**.

Pentru sau mulțimea

conține un astfel de număr deci aceste valori ale lui nu convin. ..................................... **4 puncte**.

Pentru avem neprim ………………………..………. **4 puncte**.

 este unica soluție ...................................................................................................... **2 puncte**.

***Problema 2.***

Fie cele trei mulțimi și

Fie și . Atunci (1) ……….…………………**2 puncte**.

Din (1) rezultă și și nu ar avea măcar elemente ) .....……………….. **2 puncte**

Fie . Presupunem și și

 pentru avem . Absurd și ………………....…… **2 puncte**.

Fie , ……………...……. **2 puncte**.

Din și ………………………………………………...…..… **2 puncte**.

Cum și ……………………….….. **2 puncte**.

Pentru se obține soluția ………………………...….. **2 puncte**.

Fie .

Cum și . ………………………….. **2 puncte**.

Pentru se obține soluția ………………………….. **2 puncte**.

Presupunem . Cum și .

 Dar și . Absurd și cele două soluții sunt singurele posibile ……… **2 puncte**.

***Problema 3.***

Laturile octogonului sunt ipotenuzele a opt triunghiuri dreptunghice.

Pentru orice triunghi dreptunghic :

………….. **3 puncte**.

Adunând inegalitățile pentru cele opt triunghiuri se obține …. **3 puncte.**

Adunând inegalitățile obținem ……..…. **4 puncte.**

Fie ariile celor opt triunghiuri dreptunghice de ipotenuze .

Cele opt triunghiuri sunt asemenea. Primele două ne dau și .

Deducem ………………………………………………… **5 puncte**.

…………….. **5 puncte**.

***Problema 4.***

Numim

 pas de tipul 1,

 pas de tipul 2,

 pas de tipul 3

1. Să presupunem că la un moment dat ratonul a efectuat *a*pași de primul tip, de al doilea tip și de al treilea tip. Deoarece la orice pas abscisa crește cu 1, iar la pașii de primul și al treilea tip, ordonata crește, respectiv, scade cu 1, vom găsi ratonul la coordonatele

Dacă ratonul a efectuat *n* pași ( ), cum orice doi pași consecutivi sunt de tipuri diferite, deducem că …………………………………………………………………………..**4 puncte**

După 2018 pași, Deci ratonul a ajuns la coordonatele .

Valoarea maximă a lui este 1009 – 0= 1009, iar cea minimă este 0 – 1009 = – 1009………..**2 puncte**

Să demonstrăm că ordonata poate fi orice număr întreg între -1009 și 1009.

Considerăm inițial un traseu ce alternează 1009 pași de primul tip cu 1009 pași de tipul 2, având

 Succesiv înlocuim câte un pas de tip 2 cu un pas de tip 3, până ce epuizăm pașii de tip 2 ( am obținut alte 1009 trasee). Apoi înlocuim succesiv pașii de tip 1 cu pași de tip 2 până la epuizarea pașilor de tip 1( am obținut alte 1009 trasee). Cum la fiecare înlocuire, valoarea lui scade cu 1, obținem 2019 poziții …………………………………………………..**4 puncte.**

1. Pentru a ajunge la coordonatele avem :

………………………..**2 puncte**

Pentru avem un singur traseu posibil ce alternează pași de tip 2 cu pași de tip 1, primul pas fiind de tipul 2…………………………………..………………………………….**3 puncte**

Pentru . Suntem obligați să începem cu un pas de tip 1 și din doi în doi pași să efectuăm un pas de tip 1. Rămân 1009 pași dintre care unul trebuie să fie de tip 3 și restul de tip 2. Găsim 1009 astfel de trasee.

În total sunt 1010 trasee prin care ratonul poate ajunge la ……………………..…..…**5puncte**

***Problema 5.***

Ali Baba și cei patruzeci de hoți stau în jurul unei mese rotunde fiecare având un număr de galbeni : . Din acel moment, ei vor proceda astfel:

Ali Baba bate din palme. Toți banii se strâng la mijlocul mesei și apoi fiecare hoț ( inclusivAli Baba ) ia inapoi o sumă egală cu media aritmetică dintre sumele pe care le-au avut anterior el și vecinul din dreapta. Știm că numerele scrise în baza au ultimele de cifre egale și există două care nu au ultimele de cifre egale.

Arătați că după ce Ali Baba va bate din palme a -a oară suma strânsă în mijlocul mesei nu va mai putea fi împărțită deoarece unele medii nu ar fi numere întregi.

***TIMP DE LUCRU***: **4 ORE**.

***PUNCTAJ***: **20 de puncte pentru fiecare problemă**.

Se acordă 20 de puncte din oficiu.