 CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

***“OCTAV ONICESCU”***

***Ediţia a XXI-a***

***Problema 1.***

Expresia $E\left(x\right)=x^{2}+x+41$ se numește “norocoasă” deoarece toate numerele $E\left(0\right), E\left(1\right), … ,E\left(39\right)$ sunt prime. Arătați că $E\left(x\right)=E\left(-x-1\right)$ și găsiți toate numerele întregi $n$ pentru care $E\left(n\right), E\left(n+1\right), … , E\left(n+79\right) $sunt prime. Justificați răspunsul.

***Problema 2.***

Să se determine numerele naturale $n$ și trei mulțimi care îndeplinesc următoarele condiții:

* mulțimile sunt disjuncte două câte două și reuniunea lor este $\left\{1, 2, …, n \right\}.$
* fiecare mulțime conține cel puțin două elemente
* pentru oricare dintre mulțimi suma oricăror două elemente distincte din aceasta nu aparține reuniunii celorlaltor două mulțimi.

***Problema 3.***

Considerăm octogonul convex $B\_{1}B\_{2}B\_{3}B\_{4}B\_{5}B\_{6}B\_{7}B\_{8}$ de perimetru $P\_{O}$. Dreptele $B\_{1}B\_{2}, B\_{3}B\_{4}, B\_{5}B\_{6} și B\_{7}B\_{8}$ determină un dreptunghi de arie $A\_{1}$ și perimetru $P\_{1} $iar dreptele $B\_{2}B\_{3}, B\_{4}B\_{5}, B\_{6}B\_{7} și B\_{8}B\_{1}$ determină un dreptunghi de arie $A\_{2}$ și perimetru $P\_{2}$. Arătați că:

1. $\left(\sqrt{2}-1\right)\left( P\_{1}+P\_{2}\right)\leq P\_{O}<\frac{1}{2}\left( P\_{1}+P\_{2}\right) $
2. $A\_{1}=A\_{2}⟺$ $B\_{1}B\_{2}^{2}+B\_{3}B\_{4}^{2}+B\_{5}B\_{6}^{2}+B\_{7}B\_{8}^{2}=B\_{2}B\_{3}^{2}+B\_{4}B\_{5}^{2}+B\_{6}B\_{7}^{2}+B\_{8}B\_{1}^{2}$

***Problema 4.***

Ratonul Tony se găsește în punctul de coordonate $(0,0)$ și face pași după următoarea regulă.

Dacă la un moment dat se găsește la coordonate $(x,y)$ după un pas el se va găsi la coordonate$ (x+1,y-1)$ , $(x+1,y)$ sau $(x+1,y+1)$.

Ratonul vă solicită să raspundeți la două întrebări:

1. În câte poziții distincte se poate afla după $2018$ pași ?
2. În câte moduri distincte poate ajunge la coordonatele $(2019,1009)$ ?

Nu încercați să păcăliți ratonul. Justificați răspunsul.

***Problema 5.***

Ali Baba și cei patruzeci de hoți stau în jurul unei mese rotunde fiecare având un număr de galbeni : $a\_{1},a\_{2},a\_{3},…, a\_{41}$. Din acel moment, ei vor proceda astfel:

Ali Baba bate din palme. Toți banii se strâng la mijlocul mesei și apoi fiecare hoț ( inclusivAli Baba ) ia inapoi o sumă egală cu media aritmetică dintre sumele pe care le-au avut anterior el și vecinul din dreapta. Știm că numerele $a\_{1},a\_{2},a\_{3},…, a\_{41}$ scrise în baza $2$ au ultimele $23$ de cifre egale și există două care nu au ultimele $24 $de cifre egale.

Arătați că după ce Ali Baba va bate din palme a $24$-a oară suma strânsă în mijlocul mesei nu va mai putea fi împărțită deoarece unele medii nu ar fi numere întregi.

***TIMP DE LUCRU***: **4 ORE**.

***PUNCTAJ***: **20 de puncte pentru fiecare problemă**.

Se acordă 20 de puncte din oficiu.