***CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ***

***“OCTAV ONICESCU”***

***Ediţia a XXII-a***

***Problema 1.***

Viorel trebuie să scrie câte un număr real în fiecare pătrățel al unei table de șah, astfel încât în fiecare pătrat $3X3$ suma numerelor din cele $9$ pătrățele să fie $π$. Deoarece este îndragostit de numărul $π$ el își dorește să scrie în cât mai multe pătrățele $π$. Care este numărul maxim de pătrățele în care Viorel poate să scrie $π$? Justificați răspunsul.

***Problema 2.***

Se consideră expresia $E\left(x\right)=1+\frac{1}{x}$.

Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale de la $1$ la $2019$. Se înlocuiesc oricare două numere $a$ și $b$ cu numărul $\frac{ab}{a+b+1}$. Procedeul se repetă până când rămâne un singur număr $α$ pe tablă.

1. Calculați produsul $E\left(1\right)∙E\left(2\right)∙E\left(3\right)…E\left(2019\right)$.
2. Să se demonstreze că oricum înlocuim numerele de pe tablă la final se obține $α=\frac{1}{2019}$
3. Care este numărul maxim de numere $1$ care pot apare la un moment dat pe tablă?

***Problema 3.***

Se consideră 3 puncte $A, B, C $situate pe un cerc $C\left(O;1\right)$ sau în interiorul acestuia.

1. Dacă $MA+MB+MC\leq 3$ pentru orice punct $M$ de pe cerc, să se arate că $A, B $și $C$ coincid cu $O$.
2. Dacă $MA^{2}+MB^{2}+MC^{2}=6$ pentru orice punct $M$ de pe cerc, arătați că $A, B $și $C$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral înscris în $C\left(O;1\right)$

***Problema 4.***

Se consideră mulțimea $A=\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\right\}$. Pentru orice submulțime nevidă $B$ a mulțimii $A$ se definesc două tipuri de transformări:

1. Dacă $ x\leq 7, x\in B, x+1\in B, x+2\notin B $ se înlocuiesc $x$ și $x+1$ cu $x+2$.
2. Dacă $ x\leq 7, x\notin B, x+1\notin B, x+2\in B $ se înlocuiește $x+2$ cu $x$ și $x+1$.

Două submulțimi ale mulțimii $A$ se numesc echivalente dacă se pot obține una din alta după un șir de transformări de tip 1 și/sau 2. Care este numărul maxim de submulțimi **nevide** ale mulțimii $A$ care pot fi alese astfel încât oricare două să nu fie echivalente? Justificați raspunsul.

***TIMP DE LUCRU***: **4 ORE**.

***PUNCTAJ***: **20 de puncte pentru fiecare problemă**.

Se acordă 20 de puncte din oficiu.