SOLUȚII

***Problema 1***

Numărul maxim de pătrățele cu $π $este **60**, căci:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Orice pătrat 3 X 3 are măcar un număr diferit de $π⟹$cele 4 pătrate 3 X 3 din colțurile tablei, disjuncte fiind, conțin împreună măcar 4 numere diferite de $π⟹$ tabla are cel mult 60 de numere $π.$
2. O așezare de 60 de numere $π$ este următoarea : în fiecare din cele 4 pătrățele hașurate ( vezi desenul) scriem numărul $-7π,$ iar în celelalte 60 de pătrățele trecem $π.$

Oricum luăm un pătrat 3 X 3 al tablei, acesta are 8 numere de $π$ și un număr de $-7π,$ cu suma totală $π.$

***Problema 2***

1. Produsul este 2020**.**
2. Dacă la un moment dat numerele sunt x1, x2,..., xn , le asociem produsul

P = E(x1)$∙$ E(x2)$∙ $E(x3). $∙…∙ $E(xn).

Să vedem cum se modifică P dacă înlocuim x1 și x2  cu $\frac{x\_{1}x\_{2}}{x\_{1}+x\_{2}+1}$.

Noile numere au produsul :

P’=E($\frac{x\_{1}x\_{2}}{x\_{1}+x\_{2}+1}$)$ ∙$ E(x3)$∙…∙ $E(xn)= (1+$\frac{x\_{1}+x\_{2}+1}{x\_{1}x\_{2}}$)$ ∙$ E(x3)$∙…∙ $E(xn)= P.

În concluzie produsul P este invariant și egal cu 2020, conform punctului a).

La final avem P = 1+ $\frac{1}{α}=2020⇒α=\frac{1}{2019}$.

1. Dacă la un moment dat, printre numerele x1, x2,..., xn de pe tablă ar fi măcar 11 numere de 1, atunci P = E(x1)$∙$ E(x2)$∙ $E(x3). $∙…∙ $E(xn) $\geq \left(E\left(1\right)\right)^{11}=2^{11}=2048,$ absurd. Deci pe tablă sunt cel mult 10 numere de 1 la orice moment.

Să arătăm cum putem genera 10 numere de 1 plecând de la numerele inițiale ( de fapt 9 numere de 1, căci 1 îl avem deja !)

Să izolăm numerele n, n+1, ... , 2n-1 ( cu 2$\leq $n$\leq $1010) și să facem transformări doar cu ele până le reducem la un singur număr r. Cum produsul E(n)E(n+1)...E(2n-1) =E(r) și

E(n)E(n+1)...E(2n-1) =$\frac{n+1}{n}∙\frac{n+2}{n+1}∙…∙\frac{2n}{2n-1}=2$, deducem că r=1.

Altfel spus, submulțimea {n, n+1, n+2,… , 2n-1} generează un 1.

Considerăm 9 astfel de submulțimi disjuncte:

{2 , 3 }

{4, 5, 6, 7}

{8, 9, 10, …, 15}

………………………..

{512, 513, … ,1023}

toate având forma { 2k; 2k +1; 2k+2;… ; 2k+1-1} cu 1$\leq $n$\leq $9. Aceste 9 submulțimi generează 9 numere de 1 care împreună cu 1 de la început ne dau 10 de 1 pe tablă!

***Problema 3***

1. Presupunem prin absurd că A, B sau C nu este O: de exemplu A$\ne O. $Considerăm un diametru [MN] al cercului ce nu conține punctul A$⟹$A, M, și N sunt necoliniare și în $△AMN$ avem MA + NA > MN. **(1)**

OA

NA

A

În triunghiurile BMN și CMN (posibil degenerate) avem MB + NB $\geq $ MN **(2)** și MC+NC $\geq $ MN **(3).**

M

Adunând inegalitățile (1), (2), (3) găsim:

(MA +MB +MC) +(NA +NB +NC) > 6, absurd, căci MA +MB +MC $\leq 3$ și NA +NB +NC $\leq 3$. Deci A = B = C = O.

1. Fie G centrul de greutate al $△ABC$ ( posibil degenerat). Folosind relația lui Leibniz, obținem: 6= MA2+ MB2+MC2=3MG2+GA2+GB2+GC2, oricare ar fi M $\in $**C.**

Deci MG este constant pentru orice M $\in $**C**$ ⟹$ G=O.

Găsim 3MO2 +OA2 + OB2+ OC2 =6 $⟹$ OA2 + OB2+ OC2 =3. Dar OA, OB, OC $\leq 1$ $⟹ $OA=OB=OC=1 și A, B, C $\in $**C.**

Dacă A, B, C nu ar fi distincte atunci G nu ar fi O.

Deci A, B, C sunt distincte și fiind pe cerc, determină un triunghi echilateral căci O este și centru de greutate și centru al cercului circumscris.

***Problema 4***

Considerăm șirul lui Fibonacci (Fn)n$\geq $1  cu : F1=1, F2=2 și Fn= Fn-1 + Fn-2 pentru n$\geq $3. Oricărei submulțimi B îi asociem suma SB=$\sum\_{i\in B}^{}F\_{i}$.

Valoarea minimă a sumelor SB se obține pentru B={1} și este F1=1, iar valoarea maximă se obține pentru B= A și este F1 +F2 +...+F9=142.

Observăm că suma SB este invariantă la ambele transformări. Deducem că dacă B și C sunt echivalente, atunci avem SB= SC.

Reciproc, se poate arăta că dacă SB=SC, atunci B și C sunt echivalente (demonstrația se bazează pe faptul că dacă un număr natural are două reprezentări distincte ca sumă de termeni Fibonacci, atunci se poate trece de la o reprezentare la alta aplicând la nivelul indicilor transformările din enunț).

În plus, se știe că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă de termeni distincți ai șirului Fibonacci.

Cum numerele SB iau valori între 1 și 142 deducem că numărul maxim de submulțimi B neechivalente este 142.