COLEGIUL NAŢIONAL "A.T. LAURIAN" BOTOŞANI
5 noiembrie 2022

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "OCTAV ONICESCU" Ediţia a XXIII-a

Soluții

Problema 1.

a) Fie $a_1 = \overline{xyz}$ primul termen. Atunci $a_2 = \overline{xyz} - (x + y + z) = 99x + 9y$ este divizibil cu 9. Analog orice termen a_i cu $i \geq 2$ este divizibil cu 9.

Fie $i \geq 2$ pentru care $a_i > 0$ atunci $a_{i-1} = a_i + S(a_{i-1}) \geq a_i > 0$ și de aici $S(a_{i-1}) > 0$ deci în final vom avea $0 < a_i < a_{i-1}$.
Să presupunem (prin reducere la absurd) că $a_{100} > 0$. Rezultă că

$$0 < a_{100} < a_{99} < \cdots < a_3 < a_2 < a_1$$

și cu excepția lui a_1 avem în inegalitate 99 de multiplii de 9, nenuli, distincți și strict mai mici decât 900. Există exact 99 de astfel de numere de unde imediat se deduce că

$$a_{100} = 9 \cdot 1, a_{99} = 9 \cdot 2, \ldots, a_3 = 9 \cdot 98, a_2 = 9 \cdot 99$$

Am dedus că $a_2 = 891 \text{ și } a_3 = 882$.
ABSURD pentru că $891 - S(891) = 891 - 18 = 873 \neq 882$.
În concluzie $a_{100} = 0$.

b) Fie$v$ cu $v \geq 100$ valoarea căutată. Următorul temen va fi $v - S(v) < 100$ deci $v < 100 + S(v) \leq 118$. Astfel v poate fi doar 108 sau 117. Dar $117 - S(117) = 108$ nu convine. Soluția este $v = 108$.

Problema 2.

Notăm cu s suma celor 10 numere. Alegem și fixăm unul dintre numere și îl notăm cu a. Avem:

$$s - a = \frac{1}{a} + 17 \to a + \frac{1}{a} = s - 17.$$

Pentru oricare număr x dintre cele rămase avem analog

$$x + \frac{1}{x} = s - 17 = a + \frac{1}{a}$$

Deci

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a} \to x - a = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \to x - a = \frac{x - a}{ay} \to ax(x - a) = (x - a) \to$$

$$(ax - 1)(x - a) = 0 \to x - a = 0 \; sau \; ax = 1 \; deci$$

$$x = a \; sau \; x = \frac{1}{a}$$

Oricare dintre cele 10 numere au fie valoarea a fie valoarea $\frac{1}{a}$ dar niciua dintre aceste valori nu poate să se regăsească de mai mult de 5 ori printe cele 10 valori însemnă că a și $\frac{1}{a}$ se regăsesc de câte 5 ori printe cele 10 numere. Deducem că

$$5\left(a + \frac{1}{a}\right) - 17 = a + \frac{1}{a} \to 4\left(a + \frac{1}{a}\right) = 17 \to a + \frac{1}{a} = \frac{17}{4} a + \frac{1}{a} = 4 + \frac{1}{4}$$

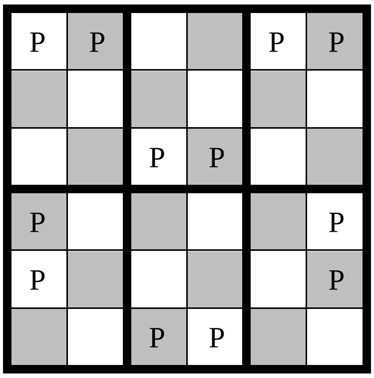
Deci

$$a = 4 \; sau \; a = \frac{1}{4}$$

Cele 10 numere sunt cinci de 4 și cinci de $\frac{1}{4}$.

Problema 3.

Împărțim tabla în șase dreptunghiuri 3x2.
Fiecare astfel de dreptunghi are 3 pătrate albe și 3 negre, dar dacă așezăm doi prinți pe aceeași culoare ei devin ambii nervoși. Astfel pe fiecare culoare putem pune cel mult un prinț, deci într-un dreptunghi 3x2 putem pune cel mult doi prinți.
Cum avem șase dreptunghiuri rezultă că pe întreaga tablă nu se pot pune mai mult de 12 prinți. Putem pune 12 prinți ca în figura de mai jos.



Problema 4.

Cazul 1. Segmentele de lungime y au capat comun

Frg $BD = CD = y$ deci $AB = AC = BC = AD = x$.

Avem ΔABC echilateral. Fie E mijlocul lui BC. Atunci AE este mediană și mediatoare. A și D sunt pe AE

Subcazul 1.1. D pe $[AE]$. Atunci $x = AD \leq AE = \frac{x\sqrt{3}}{2} < x$. Imposibil

Subcazul 1.2 D pe prelungirea lui $[AE]$ pe partea lui A. În ΔDEB dreptunghic in E avem

$$DE = DA + AE = x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$BE = \frac{x}{2}$$

$$BD = y$$

Cu terorema lui Pitagora avem $y^2 = BD^2 = BE^2 + DE^2 = x^2\left(2+\sqrt{3}\right)$ și obtinem $r = 2 + \sqrt{3}$

Subcazul 1.2 D pe prelungirea lui $[AE]$ pe partea lui E. În ΔDEB dreptunghic in E avem

$$DE = DA - AE = x - \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$BE = \frac{x}{2}$$

$$BD = y$$

Cu terorema lui Pitagora avem $y^2 = BD^2 = BE^2 + DE^2 = x^2\left(2-\sqrt{3}\right)$ și obtinem $r = 2-\sqrt{3}$

Cazul 2. Segmentele de lungime y nu au capăt comun.

Frg Frg $AC = BD = y$ deci $AB = BC = CD = DA = x$.

Se explică $ABCD$ romb, dar diagonalele sunt egale, deci $ABCD$ pătrat de latura x și diagonala $y = x\sqrt{2}$. Obținem $r = 2$.

Deci valorile posibile pentru r sunt 2, $2-\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$.

Problema 5.

Folosim inducția.

Pentru $n = 2$ avem nevoie de $3 = 2^2 - 1$ zile:

Ziua 1	Ziua 2	Ziua 3
	1	
2	2	1

Presupunem că pentru n farfurii avem nevoie de $k = 2^n - 1$ zile :

Ziua 1	Ziua 2			Ziua k
	$n-1$		1	
n	n	...	2	1

Pentru $n+1$ farfurii împărțim zilele în trei grupe:

- Ziua 1 în care farfuria $n+1$ este singură în stivă.
- Zilele în care farfuria $n+1$ este în stivă cu măcar o farfurie deasupra ei.
- Zilele în care farfuria $n+1$ nu mai este în stivă.

Ziua 1
$n+1$

Ziua 2				Ziua k+1
	$n-1$		1	
n	n		2	1
$n+1$	$n+1$	...	$n+1$	$n+1$

Ziua k+2				Ziua 2k+1
	$n-1$		1	
n	n	...	2	1

Grupa a doua începe în ziua 2 când punem farfuria n deasupra farfuriei $n+1$ și se termină cu ziua în ziua când deasupra farfuriei $n+1$ este farfuria 1.

În următoarea zi începe a treia grupă : farfuria $n+1$ va fi pusă în dulap pentru totdeauna și în stivă vom avea doar farfuria n. Conform ipotezei inductive ultima grupă va avea k zile. Dar abstracție

făcând de existența farfuriei $n+1$ mutările făcute în grupa a doua sunt identice cu cele din grupa a treia deci și grupa a doua are tot k zile .
În total a fost nevoie de $2k+1=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$ zile ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

TIMP DE LUCRU: **4 ORE**.
PUNCTAJ: **20 de puncte pentru fiecare problemă**.
Se acordă 20 de puncte din oficiu.