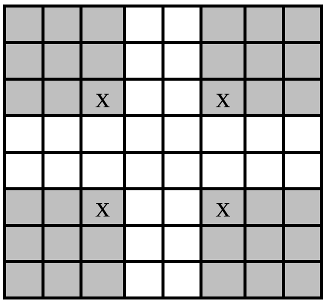
COLEGIUL NAŢIONAL "A.T. LAURIAN" BOTOŞANI
20 ianuarie 2024

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "OCTAV ONICESCU"
Ediţia a XXIV-a

Soluții

Problema 1.



Numărul maxim de zerouri este 60 deoarece: ……………………….……………………(**2 puncte**)

a) Cele patru pătrate 3 x 3 din colțurile tablei au fiecare măcar câte un număr nenul. Tabla are deci, măcar patru numere nenule și implicit cel mult 60 de numere nule. …… …….(**4 puncte**)

b) O completare cu 60 de numere nule este următoarea : în fiecare din cele patru poziții marcate cu x completăm câte un 2024, iar în celelalte poziții punem cele 60 de zerouri. Fiecare pătrat 3 x 3 are un 2024 și opt zerouri cu suma dorită. …………………………………….(**14 puncte**)

Problema 2.

$\sum_{i=1}^{20}(x_i+1)(x_i-2)=\sum_{i=1}^{20}x_i^2-\sum_{i=1}^{20}x_i \ -\sum_{i=1}^{20}2=50-10-40=0$ …………..(**6 puncte**)

Dar $(x_i+1)(x_i-2)\le 0$ pentru orice i. Deci $(x_i+1)(x_i-2)=0$ pentru orice i. ……(**6 puncte**)

Avem $x_1,x_2,\dots,x_{20}\ \in\{-1;2\}$ și $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=10\Rightarrow$

zece dintre numere sunt egale cu -1 și celelalte zece sunt egale cu 2. …………………..(**5 puncte**)

Obținem $x_1^6+x_2^6++\cdots+x_{20}^6=10\cdot(-1)^6+10\cdot 2^6=650.$ ……………………..….(**3 puncte**)

Problema 3.

Presupunem prin absurd că există a_n cu $s(a_n) = 30$. Deducem $3 \mid a_n$, a_n are măcar patru cifre și $n \geq 2$. ……………………………………………………………………………(**4 puncte**)

Avem două posibilități :

a) Numerele $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ se divid toate cu 3.
Pentru $k = \overline{1,\ n-1}$, din $3 \mid a_k \Rightarrow 3 \mid s(a_k)$, deci $s(a_k) \geq 3$.
Dar $d(a_k) = 3$ sau $2 \Rightarrow$ $a_{k+1} = a_k - s(a_k) + d(a_k) \leq a_k$.
Deci $a_{k+1} \leq a_k$ pentru $k = \overline{1,\ n-1}$ adică $a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_2 \leq a_1 \leq 999$, absurd pentru că a_n are cel puțin patru cifre. ……………………………… ………..(**8 puncte**)

b) Măcar unul dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ nu se divide cu 3.
Fie k cu $1 \leq k \leq n-1$ pentru care $3 \nmid a_k \Rightarrow 3 \nmid d(a_k)$. Dar $3 \mid a_k - s(a_k)$ deci $3 \nmid a_{k+1}$. La fel $3 \nmid a_{k+2}$, $3 \nmid a_{k+3}$ … $3 \nmid a_n$, absurd pentru că $3 \mid a_n$. ………(**8 puncte**)

Problema 4.

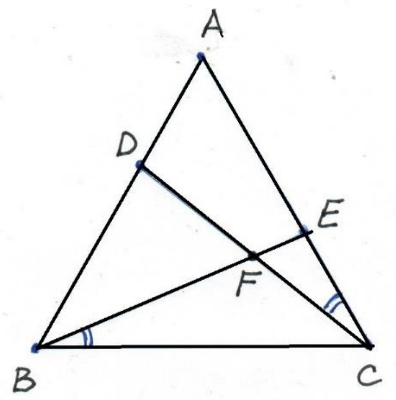


Figura a)

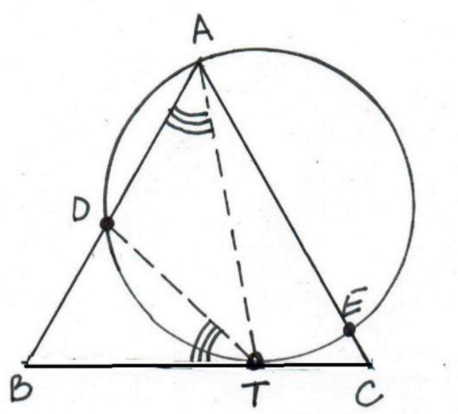


Figura b)

a) $\mathscr{C}$ trece prin $F \Rightarrow \widehat{DFE} + \hat{A} = 180°$ deci $\widehat{BFC} = 120° \Rightarrow \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = 60°$.
Deducem $\widehat{FBC} = \widehat{FCE} \Rightarrow \Delta BCE \equiv \Delta CAD\ (ULU) \Rightarrow CE = AD$.
Găsim $BD + CE = BD + AD = l$. …………………………………………...(**10 puncte**)

b) Fie T punctul de tagență.
Puterea punctului B față de $\mathscr{C}$ ne dă $BT^2 = BD \cdot BA \Rightarrow BT = \sqrt{BD \cdot l}$.
Analog, puterea punctului C față de $\mathscr{C}$ ne dă $CT = \sqrt{CE \cdot l}$.
Găsim $l = BT + CT = \sqrt{BD \cdot l} + \sqrt{CE \cdot l} \Rightarrow \sqrt{BD} + \sqrt{CE} = \sqrt{l}$. ……………(**10 puncte**)