COLEGIUL NAŢIONAL "A.T. LAURIAN" BOTOŞANI
20 ianuarie 2024

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "OCTAV ONICESCU" Ediţia a XXIV-a

Problema 1.

Completați o tablă de șah cu 64 de numere întregi astfel încât, pe fiecare pătrat $3\text{x}3$, suma numerelor să fie 2024 și tabla să conțină un număr maxim de numere egale cu 0. Justificați răspunsul.

Problema 2.

Numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{20} \in [-1; 2]$ verifică egalitățile $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 10$ și $x_1^2 + x_2^2 + + \cdots + x_{20}^2 = 50$. Demonstrați că $x_1^6 + x_2^6 + + \cdots + x_{20}^6 = 650$.

Problema 3.

Pentru orice număr $y \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ notăm cu $s(y)$ suma cifrelor lui y și cu $d(y)$ cel mai mic divizor natural, diferit de 1 al lui y.

Considerăm un șir de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ unde $a_1$este un număr de două sau trei cifre iar $a_{n+1} = a_n - s(a_n) + d(a_n)$ pentru orice $n \geq 1$. Arătați că $s(a_n) \neq 30$ pentru orice $n \geq 1$.

Problema 4.

Fie triunghiul echilateral ABC de latură l și punctele D, E, F cu $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ și $\{F\} = BE \cap CD$. Notăm cu $\mathscr{C}$ cercul prin A, D și E. Arătați că:

a) Dacă $\mathscr{C}$ trece prin F atunci $BD + CE = l$.
b) Daca $\mathscr{C}$ este tangent la BC atunci $\sqrt{BD} + \sqrt{CE} = \sqrt{l}$.

***TIMP DE LUCRU*: 3 ORE.**
***PUNCTAJ*: 20 de puncte pentru fiecare problemă.**
Se acordă 20 de puncte din oficiu.