***CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ***

***“OCTAV ONICESCU”***

***Ediţia a XXV-a***

***Problema 1.***

Fie $A$ o mulțime finită de numere reale strict pozitive. Mulțimea are cel puțin $3$ elemente, iar suma lor este $\frac{7}{2}$ . Se știe că produsul oricăror două elemente distincte din $A$ este tot un număr din $A$.

Arătați că $A=\left\{\frac{1}{2} ;1;2\right\}$.

***Problema 2.***

Considerăm numerele reale $a,b$ și $S$ cu $1\leq a\leq b\leq 8$ și $S=\frac{8-b}{b}+\frac{b-a}{a}+a.$

1. Demonstrați că $S\geq 4$ și $S\leq 8$.
2. Pentru fiecare inegalitate, determinați valorile lui $a$ și $b$ pentru care se obține egalitate.

***Problema 3.***

Șirul de numere naturale $\left(a\_{n}\right)\_{n\geq 1}$ are $a\_{1}\ne 1 $și $a\_{n}+a\_{n+1}=3a\_{n+1}a\_{n+2}-11$. Arătați că:

1. $a\_{n+2}-a\_{n}=3a\_{n+2}\left(a\_{n+3}-a\_{n+1}\right)=0$ pentru orice $n\geq 1$.
2. $a\_{n}=\left\{\begin{matrix}1 , n par\\6, n impar\end{matrix}\right.$

***Problema 4.***

Un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc **C** are lungimile laturilor distincte. Se știe că tangentele la cerc în $A$ și $C$ se intersectează într-un punct $T$, situat pe dreapta $BD$. Arătați că:

1. $\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$ .
2. Bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{C}$ se intersectează într-un punct situat pe segmentul $(BD)$.
3. Tangentele la cerc în $B$ și $D$ se intersectează într-un punct situat pe dreapta $AC$.

***TIMP DE LUCRU***: **3 ORE**.

***PUNCTAJ***: **20 de puncte pentru fiecare problemă**.

Se acordă 20 de puncte din oficiu.