



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"OCTAV ONICESCU"
Ediția a XXVI-a

Soluții

Problema 1.

a) Presupunem prin absurd că p nu se divide cu m

Aplicăm teorema împărțirii cu rest

$$p = c \cdot m + r \text{ cu } 0 < r < m$$

Folosim de c ori faptul că pentru x și $y \in A$ cu $y > x$ avem $y - x \in A$:

$$p - m = (c - 1) \cdot m + r \in A \rightarrow \dots \rightarrow p - c \cdot m = r \in A$$

ceea ce contrazice minimalitatea lui m 7 p

Observație : Dacă am avea $c = 1$, cum $r = 0$ ar rezulta că de fapt $p = m$ (fals) și demonstrația ne spune că $2m, 3m, \dots, cm \in A$.

Suntem siguri că $2m \in A$ și folosind faptul că x și $y \in A$ cu $y > x$ avem $y + x \in A$ putem demonstra prin inducție că A este mulțimea tuturor multiplilor nenuli ai lui m

$$A = \{m, 2m, 3m, 4m, \dots\} \dots \dots \dots 8p$$

b) m are exact 40 de multipli strict pozitivi mai mici ca 2025. Rezultă :

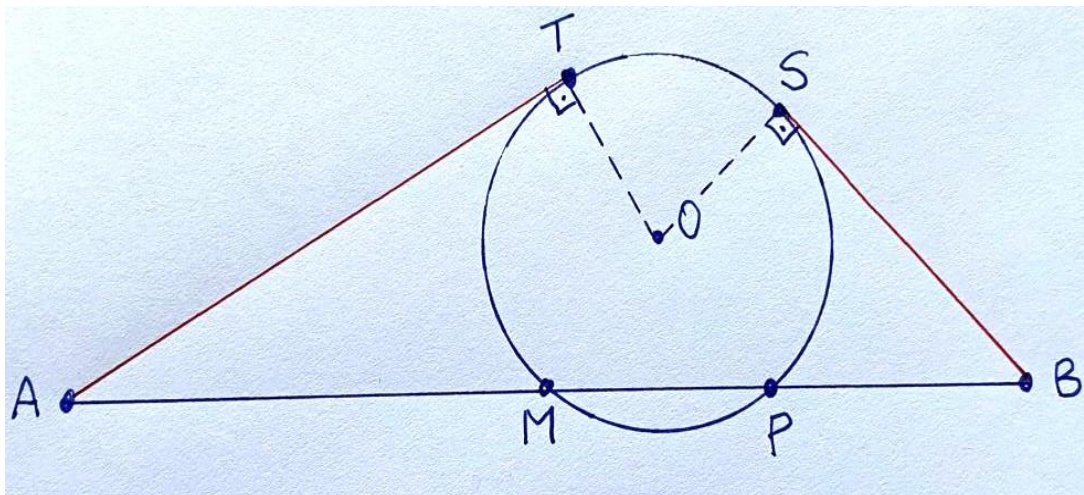
$$40 \cdot m \leq 2025 < 41 \cdot m \rightarrow \frac{2025}{41} < m \leq \frac{2025}{40} \rightarrow$$

$$50 - \frac{25}{41} < m \leq 50 + \frac{5}{40} \rightarrow m = 50$$

Concluzia este că

$$A = \{50k \mid k > 0, \text{ natural} \} \dots \dots \dots 5p$$

Problema 2.



a) Dacă $\odot$ este tangent dreptei AB în M rezultă $AT = AM = \frac{AB}{2}$ iar $BS = BM = \frac{AB}{2}$.

Deci $AT^2 + BS^2 = \frac{AB^2}{2}$ 2p

Dacă $\odot$ este secant dreptei AB notăm cu P al doilea punct de intersecție dintre cerc și AB .

Puterile punctelor A și B față de cerc sunt:

$AT^2 = AM \cdot AP$ și $BS^2 = BM \cdot BP$ și rezultă

$$AT^2 + BS^2 = \frac{AB}{2} \cdot AP + \frac{AB}{2} \cdot BP = \frac{AB^2}{2}.$$

Deci $AT^2 + BS^2 = \frac{AB^2}{2} = \text{constant}$ 8p

O soluție alternativă folosește formula medianei $OM = r$ în triunghiul OAB .

$$r^2 = \frac{2(OA^2 + OB^2) - AB^2}{4}$$

Dar $OA^2 + OB^2 = AT^2 + BS^2 + 2r^2$ și înlocuind în relația anterioară obținem $AT^2 + BS^2 = \frac{AB^2}{2}$.

b) $(AT + BS)^2 + (AT - BS)^2 = 2(AT^2 + BS^2) = AB^2$

Deducem $(AT + BS)^2 \leq AB^2$ adică $AT + BS \leq AB$ 5p

Egalitatea $AT + BS = AB$ are loc doar dacă

$AT = BS \Leftrightarrow AO = BO \Leftrightarrow O \in \text{mediatoarei segmentului } [AB] \Leftrightarrow$

cercul este tangent la AB în M5p

Problema 3.

- a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$ pentru $x, y \geq 0$ cu egalitate dacă $x = 0$ sau $y = 0$
 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n} \geq \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$ pentru $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ cu egalitate dacă cel puțin $n - 1$ numere sunt nule

În particular

$$\sqrt{a_1 - a_0} + \sqrt{a_2 - a_1} + \dots + \sqrt{a_n - a_{n-1}} \geq \sqrt{a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_n - a_{n-1}}$$

$$\sqrt{a_1 - a_0} + \sqrt{a_2 - a_1} + \dots + \sqrt{a_n - a_{n-1}} \geq \sqrt{a_n - a_0}$$

$$\sqrt{a_1 - a_0} + \sqrt{a_2 - a_1} + \dots + \sqrt{a_n - a_{n-1}} \geq 1 \dots\dots\dots 5p$$

Egalitatea : Să presupunem că toate numerele din S cu excepția celui de pe poziția i adică $\sqrt{a_i - a_{i-1}}$ sunt nule. Atunci avem $0 = a_0 = a_1 = \dots = a_{i-1}$ și $a_i = a_{i+1} = \dots = a_n = 1$.

Egalitatea se obține când toate numerele de la primul termen până la un anumit termen sunt 0 și apoi toate numerele care urmează sunt 1.....5p

- b) Folosim inegalitatea medie patratică

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

Pentru $x_i = \sqrt{a_i - a_{i-1}}$ inegalitatea devine

$$S^2 \leq n(a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_n - a_{n-1}) = n \Rightarrow S \leq \sqrt{n} \dots\dots\dots 5p$$

Egalitatea :

Se obține atunci când $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ adică înseamnă că

$$\sqrt{a_1 - a_0} = \sqrt{a_2 - a_1} = \dots = \sqrt{a_n - a_{n-1}}$$

$$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$$

Dar $a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_n - a_{n-1} = n \cdot r$

$$a_n - a_0 = n \cdot r$$

$$1 = n \cdot r$$

$$r = \frac{1}{n}$$

Si pentru oricare i avem

$$a_i = a_i - 0 = a_i - a_0 = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \dots + a_i - a_{i-1} = i \cdot r$$

$$\text{Deci } a_i = \frac{i}{n} \dots\dots\dots 5p$$

Problema 4.

- a) $\widehat{DCB} = \widehat{ECA} (= 60^\circ - \widehat{ACD})$, Dar $DC = EC$ și $BC = AC$ deci triunghiurile DCB și ECA sunt congruente.

Deducem $\widehat{BDC} = \widehat{AEC}$ și $EA = DB = 1$5p

Aplicăm Teorema sinusurilor în triunghiul AED :

$$\frac{ED}{\sin \widehat{EAD}} = \frac{EA}{\sin 30^\circ} \Rightarrow$$

$$\sin \widehat{EAD} = \frac{ED}{2} = \frac{DC}{2} \geq 1 \Rightarrow \sin \widehat{EAD} = 1 \text{ (adică } \widehat{EAD} = 90^\circ) \text{ și } DC = 2 \text{5p}$$

În triunghiul DEA , $\widehat{AED} = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$ și $AD = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AEC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BDE} = 180^\circ$ și punctele B, D, E sunt coliniare !5p

- b) În triunghiul ADC $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3 + 4 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$5p