



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"OCTAV ONICESCU"
Ediția a XXVI-a

Problema 1.

Fie A o mulțime infinită de numere naturale nenule cu proprietatea:

$$\forall x \text{ și } y \in A \text{ cu } x \neq y \text{ avem și } x + y \in A \text{ și } |x - y| \in A$$

- a) Dacă m este cel mai mic număr din A iar p este un alt număr din A demonstrați că $p : m$.
- b) Determinați mulțimea A știind că fix **40** dintre elementele ei sunt mai mici decât **2025**.

Problema 2.

Se consideră segmentul $[AB]$ cu mijlocul M . Prin punctul M trece un cerc variabil $\mathcal{C}$ care lasă punctele A și B în exteriorul său. Fie AT și BS tangente la cerc, cu $T, S \in \mathcal{C}$. Arătați că:

- a) $AT^2 + BS^2$ este o constantă (nu depinde de cercul ales, ci doar de lungimea segmentului $[AB]$).
- b) $AT + BS \leq AB$ iar egalitatea are loc dacă și numai dacă cercul este tangent dreptei AB .

Problema 3.

Considerăm numerele $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ cu $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_n = 1$, și $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Fie $S = \sqrt{a_1 - a_0} + \sqrt{a_2 - a_1} + \dots + \sqrt{a_n - a_{n-1}}$. Demonstrați că:

- a) $S \geq 1$ și precizați când are loc egalitatea
- b) $S \leq \sqrt{n}$ și precizați când are loc egalitatea

Problema 4.

Fie ABC un triunghi echilateral și D un punct interior lui cu $DB = 1$, $DC \geq 2$ și $\widehat{CDA} = 90^\circ$.

Considerăm punctul E în interiorul unghiului $\widehat{CDA}$ astfel încât triunghiul CDE să fie echilateral.

- a) Arătați că punctele E, D și B sunt coliniare
- b) Calculați lungimea segmentului $[BC]$.

TIMP DE LUCRU: 3 ORE.

PUNCTAJ: 20 de puncte pentru fiecare problemă.

Se acordă 20 de puncte din oficiu.